



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estudo do problema de deformación dunha placa elástica rectangular usando o operador bilaplaciano

María del Carmen Mosquera Vázquez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estudo do problema de deformación dunha placa elástica rectangular usando o operador bilaplaciano

María del Carmen Mosquera Vázquez

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Dedicado a:

*Meus pais e avós por apoiarme durante estes anos.
José Antonio Álvarez Dios e María del Carmen Muñiz Castiñeira
polo esforzo e axuda para realizar este traballo.*

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Matemática Aplicada
Título: Estudo do problema de deformación dunha placa elástica rectangular usando o operador bilaplaciano
Breve descrición do contido
Estudárase o operador bilaplaciano para describir un modelo de deformación dunha placa cunhas determinadas condicións de borde. Dende un punto de vista práctico, abordarase a resolución de dito problema empregando o método de diferenzas finitas.
Recomendacións
Dominio da teoría clásica de derivación numérica, o método de diferenzas finitas para resolver ecuacións diferenciais en derivadas parciais, e unha linguaxe de programación (MatLab).
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
1. Ecuacións 3D da elasticidade lineal	5
1.1. Modelado do problema	5
1.2. Ecuacións de equilibrio	5
1.3. Ecuacións constitutivas dos materiais elásticos	7
1.4. Ecuacións da elasticidade non lineal	9
1.5. Ecuacións da elasticidade lineal	9
2. Modelo de placa en flexión	11
2.1. Principio dos traballos virtuais	12
2.2. Relacións constitutivas	12
2.3. Hipóteses de Kirchhoff-Love	14
3. Estudo do problema discreto	21
3.1. Construción dunha malla	21
3.2. Discretización do operador bilaplaciano	23
3.3. Construción da matriz L_h	29
4. Exemplos numéricos	37
4.1. Exemplo analítico de comprobación	37
4.2. Exemplos de placas	41
A. Programas empregados	45
Bibliografía	53

Resumo

Neste traballo expoñemos o proceso para a obtención das ecuacións tridimensionais da elasticidade lineal nun corpo homoxéneo e isotrópico, para a continuación deducir o modelo dunha placa en flexión mediante un problema de contorno asociado ao operador bilaplaciano. Abordamos a continuación a discretización do devandito problema mediante o método de diferenzas finitas. Finalmente, amosamos varios exemplos numéricos como aplicación.

Abstract

In this work we describe the process to obtain the three-dimensional equations of linear elasticity in a homoneneous and isotropic body, in order to deduce the model of a bending plate as a boundary problem for the biharmonic operator. We then deal with the discretization of this problem by means of the finite difference method. Finally, we show several numerical examples as an application.

Notacións

Consideramos o espazo vectorial tridimensional \mathbb{R}^3 dotado do produto escalar usual

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^3 u_i v_i,$$

sendo $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ as coordenadas cartesianas dos vectores de \mathbb{R}^3 . A norma asociada é a euclídea habitual, dada por

$$|u| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i^2}.$$

Sexa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio aberto suficientemente regular e Γ a súa fronteira. Definimos o espazo $L^1(\Omega)$ como o espazo das funcións integrables en Ω , é dicir,

$$L^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ integrable en } \Omega\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f| dx.$$

Analogamente definimos o espazo $L^2(\Omega)$ de funcións de cadrado integrable da maneira usual:

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ medible e } |f|^2 \in L^1(\Omega) \right\},$$

dotado coa norma

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definimos $\mathcal{C}(\Omega)$ como o espazo das funcións continuas en Ω ; así $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ será o espazo das funcións continuas de clase infinito. En particular, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ é o espazo de funcións continuas de clase infinito con soporte compacto contido en Ω , é dicir, que se anulan fóra dun conxunto compacto $K \subset \Omega$.

Definimos¹ tamén o espazo de Sobolev

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega), \partial_i f \in L^2(\Omega), \ i = 1, 2, 3\},$$

dotado da norma

$$\|f\|_{H^1} = \left(\|f\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^3 \|\partial_i f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A partir deste espazo definimos (ver Evans [4], Brezis [1])

$$H^2(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^1(\Omega), \ i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Empregando as notacións habituais para as derivadas sucesivas, (en particular, para as de segundo orde, temos $\partial_{12}f = \partial_1(\partial_2f)$ e así sucesivamente), consideramos en $H^2(\Omega)$ a norma usual definida por:

$$\|f\|_{H^2} = \left(\|f\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^3 \|\partial_i f\|_{L^2}^2 + \sum_{i,j=1}^3 \|\partial_{ij} f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outra banda definimos

$$H_0^2(\Omega) = \{f \in H^2(\Omega); \ \partial_\alpha f = 0 \text{ sobre } \Gamma, \ |\alpha| \leq 1\},$$

(ver Evans [4], p.245) equipado coa mesma norma que $H^2(\Omega)$.

Recordemos tamén a fórmula de Green

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\Gamma} uv(\vec{n} \cdot \vec{e}_i) d\sigma, \ \forall u, v \in H^1(\Omega), \ i = 1, 2, 3,$$

onde \vec{n} é o vector normal unitario exterior a Γ (ver Brezis [1], p.316). Denotamos por $\mathcal{M}_{n \times n}$ o espazo das matrices cadradas reais e $A = (a_{ij})$ designa unha matriz en $\mathcal{M}_{n \times n}$. A matriz identidade (ou aplicación identidade, se non houbera risco de confusión) denótase por $I = (\delta_j^i)$ sendo δ_j^i a delta de Kronecker usual. Ademais $\mathcal{S}_{n \times n} \subset \mathcal{M}_{n \times n}$ denota o sub-conxunto de matrices simétricas.

O determinante e a traza dunha matriz $A = (a_{ij})$ denótanse por $\det A$ e $\text{tr } A$, respectivamente. A matriz de cofactores asociados á matriz invertible $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ defínese como

$$\text{cof } A := (\det A) A^{-t}.$$

O gradiente dunha función escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é $\nabla f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)$, e o gradiente do campo vectorial $v = (v_i) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a matriz $\nabla v := (\partial_j v_i)_{i=1, \dots, n; j=1, 2, 3}$ sendo i o

¹Nótese que as derivadas parciais considéranse no sentido xeneralizado, é dicir, $\exists g \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} u \partial_i \phi = - \int_{\Omega} g \phi, \ \forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. En consecuencia, $\partial_i u = g$.

índice de fila e j o índice correspondente a columna. A diverxencia do campo matricial $T = (T_{ij}) : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}$ é o campo vectorial seguinte (considerando, por exemplo $n = 3$)

$$\operatorname{div} T = \begin{pmatrix} \partial_1 T_{11}(x) + \partial_2 T_{12}(x) + \partial_3 T_{13}(x) \\ \partial_1 T_{21}(x) + \partial_2 T_{22}(x) + \partial_3 T_{23}(x) \\ \partial_1 T_{31}(x) + \partial_2 T_{32}(x) + \partial_3 T_{33}(x) \end{pmatrix}.$$

Capítulo 1

Obtención das ecuacións tridimensionais da elasticidade lineal

1.1. Modelado do problema

O desprazamento e a tensión dun corpo elástico en resposta a unha determinada carga son predecibles como a solución dun sistema de ecuacións en derivadas parciais. O antedito sistema deriva de leis físicas en forma de dous conxuntos de ecuacións: as ecuacións de equilibrio e as ecuacións constitutivas.

As ecuacións da elasticidade lineal obtéñense a partir das ecuacións da elasticidade non lineal, prescindindo dos termos non lineais no tensor de deformacións, como vemos a continuación. A obtención das ecuacións de equilibrio e as ecuacións constitutivas dadas neste capítulo pretende ser unha breve introducción ás mesmas, para unha mellor comprensión da memoria, non sendo a súa formulación un obxectivo da mesma.

1.2. Ecuacións de equilibrio

Nesta sección, comezamos estudando o desprazamento e a tensión do corpo elástico en resposta ás forzas aplicadas. Consideramos un corpo que ocupa a clausura dun dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, sobre o que non actúan forzas e ao que chamamos *configuración de referencia do corpo*. Calquera outra configuración do corpo que poida tomar ao aplicarlle determinadas forzas queda establecida mediante unha deformación, definida por unha aplicación

$$\phi : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que conserva a orientación (é dicir, $\det \nabla \phi(x) > 0$, $\forall x \in \overline{\Omega}$) e inxectiva no aberto Ω . Á imaxe $\phi(\overline{\Omega})$ chamáremoslle *configuración deformada do corpo* definida pola deformación ϕ .

Denotamos a imaxe por ϕ de calquera subconxunto $A \subset \bar{\Omega}$ mediante $\phi(A) = \tilde{A}$. A diferenza entre a configuración deformada e a configuración de referencia do corpo denomínase *desprazamento*, que vén dado polo campo vectorial

$$u := \phi - I. \quad (1.1)$$

O obxectivo desta sección é determinar a maior cantidade de información posible sobre a deformación do corpo, o cal se atopa en equilibrio estático baixo a acción das forzas aplicadas. As forzas aplicadas nunha configuración deformada represéntanse polas densidades

$$\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (forza volúmica),}$$

$$\tilde{g} : \tilde{\Gamma}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (forza superficial),}$$

onde Γ_1 é un subconxunto da fronteira Γ . Aplicando o axioma fundamental debido a Euler e Cauchy (ver Mardare [8]), postúlase que o equilibrio do corpo coas forzas aplicadas se reflicte na existencia dunha forza que actúa na fronteira de calquera dominio $\tilde{A} \subset \tilde{\Omega}$, que depende só do punto \tilde{x} e do vector normal ao corpo no dito punto, que denotamos por $n(\tilde{x})$.

Como consecuencia, existe un campo tensorial $\tilde{T} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}$, tal que

$$-\operatorname{div} \tilde{T}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x}), \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{\Omega}, \quad (1.2)$$

$$\tilde{T}(\tilde{x})\tilde{n}(\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x}), \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{\Gamma}_1, \quad (1.3)$$

$$\tilde{T}(\tilde{x}) \in \mathcal{S}_{3 \times 3}, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{\Omega}. \quad (1.4)$$

A estas ecuacións denomínaselles *ecuacións de equilibrio* da configuración deformada. As ditas ecuacións poden reformularse na configuración de referencia (coñecida) mediante un cambio de variable. Para este fin definimos o primeiro tensor de tensións de Piola-Kirchhoff dado por

$$T(x) := \tilde{T}(\phi(x)) \operatorname{cof} \nabla \phi(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.5)$$

Tendo en conta a identidade

$$(\nabla \phi(x))^{-1} T(x) = (\nabla \phi(x))^{-1} (\det(\nabla \phi(x)) \tilde{T}(\phi(x))) (\nabla \phi(x))^{-t},$$

é inmediato verificar tendo en conta (1.4) que o segundo tensor de tensións de Piola-Kirchhoff definido por

$$\Sigma(x) := (\nabla \phi(x))^{-1} T(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (1.6)$$

é simétrico. Ademais, verifícanse as seguintes ecuacións de equilibrio na configuración de referencia:

$$-\operatorname{div} T(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.7)$$

$$T(x)n(x) = g(x), \quad \forall x \in \Gamma_1, \quad (1.8)$$

$$\Sigma(x) \in \mathcal{S}_{3 \times 3}, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.9)$$

onde $f(x) = \tilde{f}(\phi(x))$, $g(x) = \tilde{g}(\phi(x))$.

1.3. Ecuacións constitutivas dos materiais elásticos

O tensor de tensións depende da deformación inducida polas forzas aplicadas ao corpo. Esta dependencia reflíctese nas ecuacións constitutivas do material. De (1.1) dedúcese que

$$\phi(x) = x + u(x), \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega}, \quad (1.10)$$

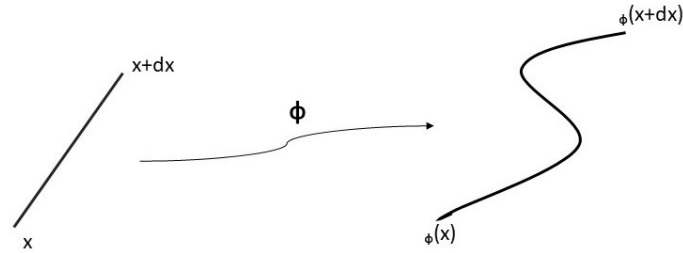
polo tanto,

$$(\partial_j \phi_i) = (\delta_{ij}) + (\partial_j u_i), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

ou, escrito matricialmente,

$$\nabla \phi = I + \nabla u. \quad (1.11)$$

Calculemos agora canto se deforma o segmento $[x, x + dx]$ mediante a deformación ϕ , supoñéndoa suficientemente regular.



Definimos unha parametrización do segmento deformado como:

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow [x, x + dx] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightsquigarrow s(t) = x + tdx \rightsquigarrow \phi(s(t)) := \tilde{s}(t) \end{aligned}$$

de modo que a lonxitude do segmento deformado é:

$$l^\phi = \int_0^1 \|\tilde{s}'(t)\| dt.$$

Por outra parte, $\tilde{s}(t) = (\phi_1(s(t)), \phi_2(s(t)), \phi_3(s(t)))$, entón

$$\tilde{s}'(t) = \nabla \phi(s(t)) s'(t) = \nabla \phi \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix},$$

de onde se deduce

$$||\tilde{s}(t)|| = (\tilde{s}'(t)) \cdot \tilde{s}'(t))^{\frac{1}{2}} = ((\tilde{s}'(t))^t \tilde{s}'(t))^{\frac{1}{2}} = ((dx_1 \ dx_2 \ dx_3)(\nabla\phi(s(t)))^t \nabla\phi(s(t)) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix})^{\frac{1}{2}}.$$

Chamando $C = (\nabla\phi)^t \nabla\phi$ ao denominado *tensor métrico* tense

$$l^\phi = \int_0^1 ((dx_1 \ dx_2 \ dx_3) C(s(t)) \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix})^{\frac{1}{2}} dt,$$

polo que, a lonxitude da fibra dependerá do tensor métrico C . Ademais, tendo en conta (1.11), obtemos

$$C = (I + \nabla u)^t (I + \nabla u) = (I + (\nabla u)^t)(I + \nabla u) = I + \nabla u + (\nabla u)^t + (\nabla u)^t \nabla u.$$

Definindo o *tensor de deformacións de Green-St Venant*

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t + (\nabla u)^t \nabla u), \quad (1.12)$$

verifícase que

$$C = I + 2E. \quad (1.13)$$

Por outra parte, defínese o *tensor de deformacións de Green-St Venant linealizado* como

$$e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u(x) + (\nabla u(x))^t). \quad (1.14)$$

Finalmente, dedúcese a partir do teorema de Rivlin-Ericksen que a ecuación constitutiva para un material elástico de Saint Venant-Kirchhoff é (ver Destuynder [3]):

$$\Sigma(x) = \lambda(\text{tr}(E(x))I + 2\mu E(x)), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (1.15)$$

sendo λ e μ as *constantes de Lamé* do material. A ecuación constitutiva (1.15) é invertible no sentido de que E pódese expresar como función de Σ da seguinte forma

$$E(x) = \frac{1+\nu}{E}\Sigma(x) - \frac{\nu}{E}(\text{tr}(\Sigma(x))I), \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

sendo ν o *coeficiente de Poisson* e E o *módulo de Young*, os cales verifican as desigualdades $E > 0$ e $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Podemos expresalos en termos das constantes de Lamé da seguinte forma

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (1.16)$$

Tamén podemos expresar os coeficientes λ e μ en función do módulo de Young e o coeficiente de Poisson.

A partir da expresión de E ,

$$E = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) = \mu \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + 2 \right).$$

Agora empregamos a expresión (1.16) de ν e obtemos,

$$E = \mu(2\nu + 2) = 2\mu(\nu + 1).$$

Despexando μ , chegamos a:

$$\mu = \frac{E}{2(\nu + 1)}. \quad (1.17)$$

Despexando λ na expresión (1.16) de ν e empregando (1.17) obtemos a expresión

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}.$$

1.4. Ecuacións da elasticidade non lineal

Combinando as ecuacións de equilibrio coas ecuacións constitutivas do material de Saint Venant-Kirchhoff, conclúese que a deformación orixinada no corpo como resposta á presenza das forzas aplicadas satisfai o problema de fronteira non lineal:

$$-\operatorname{div} T(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.18)$$

$$\phi(x) = x, \quad x \in \Gamma_0, \quad (1.19)$$

$$T(x)n(x) = g(x), \quad \forall x \in \Gamma_1, \quad (1.20)$$

$$\Sigma(x) = \lambda(\operatorname{tr}(E(x))I + 2\mu E(x)), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (1.21)$$

sendo $\Gamma_0 := \partial\Omega \setminus \Gamma_1$.

1.5. Ecuacións da elasticidade lineal

Estas ecuacións obtéñense a partir das ecuacións non lineais da elasticidade baixo a hipótese de pequenas deformacións, é dicir,

$$\phi(x) = x + u(x) \text{ con } |\nabla u(x)| \ll 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Un caso particular importante destas ecuacións fórmase cando o corpo está feito dun material elástico *isótropo*¹ e *homoxéneo*². Tendo en conta o tensor de deformacións linealizado dado en (1.14) e a ecuación constitutiva dun material de St Venant-Kirchhoff (1.15), a parte lineal do tensor $T(x)$ queda

$$\begin{aligned} T(x) &= \nabla \phi(x) \Sigma(x) = \nabla \phi(x) (\lambda(\operatorname{tr}(e(x)))I + 2\mu e(x)) = \\ &= (I + \nabla u(x)) (\lambda(\operatorname{tr}(e(x)))I + 2\mu e(x)) = \\ &= \lambda(\operatorname{tr}(e(x)))I + 2\mu e(x) + O(|\nabla u(x)|) =: \sigma(x) + O(|\nabla u(x)|). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Finalmente, as ecuacións da elasticidade lineal para un material homoxéneo e isótropo veñen dadas por

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(x) &= f(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ u(x) &= 0, \quad \forall x \in \Gamma_0, \\ \sigma(x)n(x) &= g(x), \quad \forall x \in \Gamma_1, \end{aligned} \tag{1.23}$$

onde $\sigma(x) = \lambda(\operatorname{tr}(e(x)))I + 2\mu e(x)$ sendo $e(x) = \frac{1}{2}((\nabla u(x))^t + \nabla u(x))$.

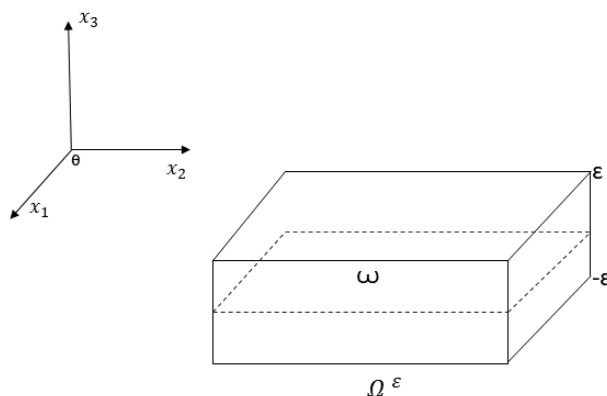
¹O comportamento elástico do corpo non depende da dirección considerada.

²Ten as mesmas propiedades en todos os puntos.

Capítulo 2

Modelo de placa en flexión

Neste capítulo consideramos como referencia un sistema ortonormal. Supoñemos que ω é un aberto de \mathbb{R}^2 que se sitúa no plano $x_3 = 0$, e que corresponde á sección media da placa. Sexa $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ un sólido que tomamos como configuración de referencia, sendo a súa fronteira lateral $\Gamma_0^\varepsilon = \partial\omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ que consideramos empotrada.



Supoñemos que non actúan forzas superficiais e as forzas volúmicas veñen dadas por $f = (f_i)$ con $i = 1, 2, 3$.

Recordamos a definición do tensor de deformacións de Green-St Venant linealizado (ver 1.14)

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Definimos o espazo das deformacións admisibles:

$$V^\varepsilon = \{v = (v_i) \in [H^1(\Omega^\varepsilon)]^3; \ v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0^\varepsilon, \ i = 1, 2, 3\}.$$

2.1. Principio dos traballos virtuais

Denotando por $\sigma = (\sigma_{ij})$ o tensor de tensións ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), entón dito tensor satisfai o principio dos traballos virtuais (ver Destuynder [3]):

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij} e_{ij}(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i, \forall v \in V^\varepsilon, \quad (2.1)$$

onde se adopta o convenio de que os índices latinos se toman de 1 a 3 e os gregos de 1 a 2, ademais de que os índices repetidos súmanse, así $\sigma_{ij} e_{ij}(v) = \sigma_{11} e_{11}(v) + \sigma_{22} e_{22}(v) + \sigma_{33} e_{33}(v) + 2\sigma_{12} e_{12}(v) + 2\sigma_{13} e_{13}(v) + 2\sigma_{23} e_{23}(v)$. Nótese que empregando a fórmula de Green (ver Brezis [1]) e tomando $v \in [\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)^\varepsilon]^3$ en (2.1), chégase ás seguintes ecuacións de equilibrio local:

$$\partial_i \sigma_{ij} + f_j = 0 \text{ en } \Omega, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

2.2. Relacións constitutivas

Cando o material do corpo é homoxéneo e isotrópico, o modelo de elasticidade lineal proporciona as seguintes relacións constitutivas entre tensións e deformacións:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ e_{ij}(u) + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{pp}(u) \delta_{ij} \right\}, \quad (2.3)$$

onde E é o módulo de Young e ν o coeficiente de Poisson.

A relación (2.3) pódese invertir para obter:

$$e_{ij}(u) = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij}. \quad (2.4)$$

Tendo en conta (2.1), definimos o problema de elasticidade tridimensional da seguinte forma:

$$\begin{cases} \text{Atopar } u^\varepsilon \in V^\varepsilon \text{ tal que:} \\ a(u^\varepsilon, v) = l(v), \forall v \in V^\varepsilon, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $a(\cdot, \cdot)$ é a forma bilineal definida por

$$a(u, v) = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{E}{1+\nu} \{ e_{ij}(u) e_{ij}(v) + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{pp}(u) e_{qq}(v) \}, \quad (2.6)$$

e $l(\cdot)$ é a forma lineal definida por

$$l(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i. \quad (2.7)$$

Empregando o Teorema de Lax-Milgram¹ (ver Brezis [1]), pódese probar que (2.5) ten solución única.

Consideramos o espacio de tensións:

$$\Sigma^\varepsilon = \{\tau = (\tau_{ij}) \in [L^2(\Omega^\varepsilon)]^9, \tau_{ij} = \tau_{ji}\},$$

dotado da norma:

$$\|\tau\|_{\Sigma^\varepsilon} = \left(\sum_{i,j=1}^3 \|\tau_{ij}\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se u^ε é a solución de (2.5), asociámoslle o tensor de tensións:

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \frac{E}{1+\nu} \{e_{ij}(u^\varepsilon) + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{pp}(u^\varepsilon) \delta_{ij}\}.$$

Entón (2.5) é equivalente á formulación mixta de Hellinger-Reissner:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Atopar } (\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \Sigma^\varepsilon \times V^\varepsilon \text{ tal que} \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^\varepsilon \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp}^\varepsilon \tau_{qq} \right) - \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij} e_{ij}(u^\varepsilon) = 0, \forall \tau \in \Sigma^\varepsilon, \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon e_{ij}(v) = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i, \forall v \in V^\varepsilon. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

¹Sexa V^ε un espazo de Hilbert e $a : V^\varepsilon \times V^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ unha forma bilineal continua e coercitiva, entón para toda $l : V^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ lineal e continua, existe un único $v \in V^\varepsilon$ tal que $a(u, v) = l(v)$, para todo $v \in V^\varepsilon$.

2.3. Hipóteses de Kirchhoff-Love

A partires de agora, supoñemos que os desprazamentos e as tensións verifican as seguintes hipóteses, chamadas de Kirchhoff-Love:

$$\begin{cases} e_{i3}(u) = 0, \\ \sigma_{i3} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Definimos os correspondentes espazos de Kirchhoff-Love para desprazamentos e tensións:

$$V^{kl} = \{v \in V^\varepsilon, e_{i3}(v) = 0\}, \quad (2.10)$$

$$\Sigma^{kl} = \{\tau = (\tau_{ij}) \in \Sigma^\varepsilon, \tau_{i3} = 0\}, \quad (2.11)$$

equipados coas normas inducidas por V^ε e Σ^ε , respectivamente.

En Destunder [3] demostrase que V^{kl} é isomorfo ao espazo

$$\mathcal{V}^{kl} = \{v = (\underline{v}_\alpha, v_3); \underline{v}_\alpha \in H_0^1(\omega), v_3 \in H_0^2(\omega), \underline{v}_\alpha = v_3 = 0 \text{ sobre } \partial\omega, \partial_\alpha v_3 = 0 \text{ sobre } \partial\omega\},$$

dotado coa norma:

$$\|v\|_{\mathcal{V}^{kl}} = \left(\sum_{\alpha=1}^2 \|\underline{v}_\alpha\|_{H^1(\omega)}^2 + \|v_3\|_{H^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entón todo elemento $v \in V^{kl}$ pódese escribir como

$$v = (\underline{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3, v_3),$$

onde \underline{v}_α e v_3 non dependen de x_3 . En efecto, probamos a continuación que baixo estas condicións \underline{v}_α e v_3 non dependen de x_3 . Para iso vemos que a súa derivada respecto a x_3 se anula.

Sabemos que $e_{i3} = 0$, entón verifícase que $e_{33} = 0$, e que $e_{\alpha 3} = 0$.

Da primeira ecuación obtemos:

$$e_{33} = 0 \Rightarrow \partial_3 v_3 = 0 \Rightarrow v_3 = v_3(x_1, x_2).$$

Do feito de que $e_{\alpha 3} = 0$ obtemos que:

$$\begin{cases} \partial_3 v_1 + \partial_1 v_3 = 0 \Rightarrow \partial_{33} v_1 + \underbrace{\partial_{13} v_3}_{=0} = 0 \\ \partial_3 v_2 + \partial_2 v_3 = 0 \Rightarrow \partial_{33} v_2 + \underbrace{\partial_{23} v_3}_{=0} = 0. \end{cases}$$

Entón como as derivadas de segunda orde mixtas son nulas, temos comprobado que $\partial_{33}v_\alpha$ tamén se anula.

Se $\partial_{33}v_\alpha = 0$ entón podemos poñer $v_\alpha = \underline{v}_\alpha(x_1, x_2) + x_3 b_\alpha(x_1, x_2)$. Derivando obtemos a igualdade $b_\alpha(x_1, x_2) = -\partial_\alpha v_3$. Substituíndo agora este valor na expresión obtida para v_α , obtemos que $v_\alpha = \underline{v}_\alpha(x_1, x_2) - x_3 \partial_3 v_3(x_1, x_2)$.

Polo que chegamos ao chamado modelo de placas de Kirchhoff-Love:

$$\begin{cases} \text{Atopar } (\sigma^{kl}, u^{kl}) \in \Sigma^{kl} \times V^{kl} \text{ tal que:} \\ \alpha(\sigma^{kl}, \tau) + \beta(\tau, u^{kl}) = 0, \forall \tau \in \Sigma^{kl}, \\ \beta(\sigma^{kl}, v) = g(v), \forall v \in V^{kl}, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha(\sigma, \tau) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \tau_{qq}, \\ \beta(\tau, v) &= - \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij} e_{ij}(v), \\ g(v) &= -l(v) = - \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Do modelo anterior podemos obter as ecuacións de movemento para a placa. Dividimos o proceso en varias etapas:

- PASO 1

Da primeira ecuación de (2.12), tomando $\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Sigma^{kl}$ obtemos que:

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = e_{11}(u^{kl}) = e_{11}(\underline{u}^{kl}) - x_3 \partial_{11} u_3^{kl}.$$

Das hipóteses de Kirchhoff-Love temos que $\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$. Entón podemos simplificar a expresión anterior e escribir:

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = e_{11}(\underline{u}^{kl}) - x_3 \partial_{11} u_3^{kl}.$$

Poñamos agora $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Sigma^{kl}$ en (2.12). Seguindo os mesmos pasos que antes,

obtemos

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = e_{22}(u^{kl}) = e_{22}(\underline{u}^{kl}) - x_3 \partial_{22} u_3^{kl}.$$

E das hipóteses de Kirchhoff-Love, temos que:

$$\frac{1+\nu}{E}\sigma_{22} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = e_{22}(u^{kl}) = e_{22}(\underline{u}^{kl}) - x_3\partial_{22}u_3^{kl}.$$

Por último, tomamos $\tau = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Sigma^{kl}$ na primeira ecuación de (2.12) para obter:

$$\frac{1+\nu}{E}2\sigma_{12} = 2e_{12}(u^{kl}) \Rightarrow \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = e_{12}(\underline{u}^{kl}) - x_3\partial_{12}u_3^{kl}.$$

Dado que

$$e_{\alpha\beta}(u^{kl}) = e_{\alpha\beta}(\underline{u}^{kl} - x_3\partial_\alpha u_3^{kl}, u_3^{kl}) = e_{\alpha\beta}(\underline{u}^{kl}) - x_3\partial_{\alpha\beta}u_3^{kl}$$

temos que:

$$\frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta}^{kl} - \frac{\nu}{E}\sigma_{\mu\mu}^{kl}\delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(\underline{u}^{kl}) - x_3\partial_{\alpha\beta}u_3^{kl}. \quad (2.14)$$

Por simplicidade denotamos

$$n_{\alpha\beta}^{kl} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta}^{kl} dx_3 \quad (2.15)$$

$$m_{\alpha\beta}^{kl} = \frac{3}{\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^{kl} dx_3. \quad (2.16)$$

Empregamos a continuación o seguinte lema (ver Ciarlet-Destuynder [2], p.19):

Lema 2.1. *Dado o tensor 2×2*

$$Y_{\alpha\beta} = aX_{\alpha\beta} + bX_{\mu\mu}\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.17)$$

se $a(a+2b) \neq 0$, verificase

$$X_{\alpha\beta} = \frac{Y_{\alpha\beta}}{a} - \frac{b}{a(a+2b)}Y_{\mu\mu}\delta_{\alpha\beta}.$$

Empregando o lema anterior en (2.14) con $a = \frac{1+\nu}{E}$, $b = -\frac{\nu}{E}$ obtemos

$$\sigma_{\alpha\beta}^{kl} = \frac{e_{\alpha\beta}(\underline{u}^{kl}) - x_3\partial_{\alpha\beta}u_3^{kl}}{\frac{1+\nu}{E}} + \frac{E\nu}{1-\nu^2}(e_{\mu\mu}(\underline{u}^{kl}) - x_3\partial_{\mu\mu}u_3^{kl})\delta_{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Integrando a expresión anterior respecto de x_3 entre $-\varepsilon$ e ε , obtemos:

$$n_{\alpha\beta}^{kl} = \frac{E}{1+\nu} 2\varepsilon e_{\alpha\beta}(\underline{u}^{kl}) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} 2\varepsilon e_{\mu\mu}(\underline{u}^{kl}) \delta_{\alpha\beta},$$

dado que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 dx_3 = 0$. Polo tanto,

$$n_{\alpha\beta}^{kl} = \frac{2E\varepsilon}{1-\nu^2} \left\{ (1-\nu) e_{\alpha\beta}(\underline{u}^{kl}) + \nu e_{\mu\mu}(\underline{u}^{kl}) \delta_{\alpha\beta} \right\}.$$

Multiplicando (2.18) por x_3 e integrado entre $-\varepsilon$ e ε , obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^{kl} &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 e_{\alpha\beta}(\underline{u}^{kl}) - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3^2 \partial_{\alpha\beta} u_3^{kl} \right\} \\ &\quad + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 e_{\mu\mu}(\underline{u}^{kl}) - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3^2 \partial_{\mu\mu}(\underline{u}^{kl}) \right\} \delta_{\alpha\beta}, \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^{kl} &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ -\frac{2}{3} \varepsilon^3 \partial_{\alpha\beta} u_3^{kl} \right\} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{2}{3} \varepsilon^3 \partial_{\mu\mu} u_3^{kl} \delta_{\alpha\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Multiplicando por $\frac{3}{\varepsilon^2}$, temos

$$\frac{3}{\varepsilon^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^{kl} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ -2\varepsilon \partial_{\alpha\beta} u_3^{kl} \right\} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \left\{ -2\varepsilon \partial_{\mu\mu} u_3^{kl} \delta_{\alpha\beta} \right\}.$$

Polo tanto,

$$m_{\alpha\beta}^{kl} = \frac{-2\varepsilon E}{1-\nu^2} \left\{ (1-\nu) \partial_{\alpha\beta} u_3^{kl} + \nu \Delta u_3^{kl} \delta_{\alpha\beta} \right\}. \quad (2.19)$$

• PASO 2

Tomamos $v = (-x_3 \partial_{\alpha} v_3, v_3)$ na segunda ecuación de (2.12) con $v_3 \in H_0^2(\omega)$. Entón, obtemos que:

$$\int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma_{ij}^{kl} e_{ij}(v) = \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_i v_i. \quad (2.20)$$

Tendo en conta que²

$$e_{ij}(v) = \begin{pmatrix} -x_3 \partial_{11} v_3 & -x_3 \partial_{12} v_3 & 0 \\ -x_3 \partial_{21} v_3 & -x_3 \partial_{22} v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos reescribir (2.20) como:

$$-\int_{\Omega^{\varepsilon}} \sigma_{\alpha\beta}^{kl} x_3 \partial_{\alpha\beta} v_3 = \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_i v_i = \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_1 (-x_3 \partial_1 v_3) + \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_2 (-x_3 \partial_2 v_3) + \int_{\Omega^{\varepsilon}} f_3 v_3.$$

²Nótese que $\partial_{\alpha\beta} v = \partial_{\beta\alpha} v$, $\forall v \in H_0^2(\omega)$ (ver Evans [4], p.247).

Polo tanto,

$$-\int_{\omega} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^{kl} \partial_{\alpha\beta} v_3 = \int_{\omega} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3 dx_3 \right) v_3 dx_1 dx_2 - \int_{\omega} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_{\alpha} dx_3 \right) \partial_{\alpha} v_3 dx_1 dx_2.$$

Finalmente,

$$-\frac{\varepsilon^2}{3} \int_{\omega} m_{\alpha\beta}^{kl} \partial_{\alpha\beta} v_3 = \int_{\omega} F_3 v_3 - \int_{\omega} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_{\alpha} dx_3 \right) \partial_{\alpha} v_3 dx_1 dx_2.$$

sendo $F_3 := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3 dx_3$. Substituíndo $m_{\alpha\beta}^{kl}$ polo valor calculado en (2.19), obtemos

$$\frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} \int_{\omega} ((1 - \nu) \partial_{\alpha\beta} u_3^{kl} \partial_{\alpha\beta} v_3 + \nu \Delta u_3^{kl} \Delta v_3) = \int_{\omega} F_3 v_3 - \int_{\omega} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_{\alpha} dx_3 \right) \partial_{\alpha} v_3, \forall v_3 \in H_0^2(\omega). \quad (2.21)$$

Para poder simplificar a formulación anterior, faremos uso do seguinte,

Teorema 2.2. *Sexa $u \in H_0^2(\omega)$. Verifícase a seguinte igualdade:*

$$\int_{\omega} \partial_{12} u \partial_{12} v = \int_{\omega} \partial_{11} u \partial_{22} v, \forall v \in H_0^2(\omega). \quad (2.22)$$

Demostración. Dado un elemento $u \in H_0^2(\omega)$, recordemos que:

$$\|u\|_{H^2(\omega)}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^2 \|\partial_i u\|_{L^2}^2 + \sum_{i,j=1}^2 \|\partial_{ij} u\|_{L^2}^2.$$

Sexan $u, v \in H_0^2(\omega)$. Entón existe unha sucesión $\{u_m\} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$ tal que $\{u_m\} \rightarrow u$ en $H^2(\omega)$.

Baixo estas condicións podemos afirmar que, empregando a fórmula de Green, e tendo en conta que os termos fronteira se anulan,

$$\int_{\omega} \partial_{12} u_m \partial_{12} v dx = - \int_{\omega} \partial_{122} u_m \partial_1 v dx, \forall m \in \mathbb{N}.$$

De novo, empregando a fórmula de Green no segundo membro, chegamos a:

$$\int_{\omega} \partial_{12} u_m \partial_{12} v dx = \int_{\omega} \partial_{22} u_m \partial_{11} v dx, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Empregando agora a converxencia de $\{u_m\} \rightarrow u$ en $H^2(\omega)$, obtemos (2.22).

En efecto, temos que:

$$\left| \int_{\omega} \partial_{12} u_m \partial_{12} v dx - \int_{\omega} \partial_{12} u \partial_{12} v dx \right| = \left| \int_{\omega} (\partial_{12} u_m - \partial_{12} u) \partial_{12} v dx \right|.$$

Empregando a desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos a seguinte cota da anterior expresión:

$$\left| \int_{\omega} (\partial_{12} u_m - \partial_{12} u) \partial_{12} v dx \right| \leq \| \partial_{12} u_m - \partial_{12} u \|_{L^2(\omega)} \| \partial_{12} v \|_{L^2(\omega)} \leq \| u_m - u \|_{H^2(\omega)} \| \partial_{12} v \|_{L^2(\omega)},$$

e dado que $\{u_m\} \rightarrow u$ en $H^2(\omega)$, obtemos o resultado buscado. \square

Empregando o teorema anterior na expresión (2.21), podemos poñer:

$$\frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} \int_{\omega} (1 - \nu) \Delta u_3^{kl} \Delta v_3 + \nu \Delta u_3^{kl} \Delta v_3 = \int_{\omega} F_3 v_3 - \int_{\omega} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_{\alpha} dx_3 \right) \partial_{\alpha} v_3, \quad \forall v_3 \in H_0^2(\omega),$$

é dicir,

$$\frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} \int_{\omega} (\Delta u_3^{kl} \cdot \Delta v_3) = \int_{\omega} F_3 v_3 - \int_{\omega} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_{\alpha} dx_3 \right) \partial_{\alpha} v_3, \quad \forall v_3 \in H_0^2(\omega).$$

Empregando dúas veces a fórmula de Green, temos que u_3^{kl} é solución do problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Atopar } u_3^{kl} \in H_0^2(\omega) \text{ tal que} \\ \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} \Delta^2 u_3^{kl} = F_3 + \partial_{\alpha} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3 f_{\alpha} dx_3 \right\} \text{ en } \omega, \\ u_3^{kl} = 0 \text{ sobre } \partial\omega, \\ \frac{\partial u_3^{kl}}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial\omega. \end{array} \right.$$

sendo $\Delta^2 = \partial_{1111} + 2\partial_{1122} + \partial_{2222}$ o operador bilaplaciano.

No caso de só haber forzas verticais, teriamos que $f_1 \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$, e o problema anterior escribiríase como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Atopar } u_3^{kl} \in H_0^2(\omega) \text{ tal que} \\ \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} \Delta^2 u_3^{kl} = F_3 \text{ en } \omega, \\ u_3^{kl} = 0 \text{ sobre } \partial\omega, \\ \frac{\partial u_3^{kl}}{\partial n} = 0 \text{ sobre } \partial\omega. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Abordaremos no capítulo seguinte a resolución numérica do problema anterior.

Capítulo 3

Estudo do problema discreto

Para simplificar a notación poñemos neste capítulo, $x_1 = x$ e $x_2 = y$; así denotarase por u_x e u_y as derivadas parciais respecto de x e y , respectivamente; analogamente, as de segunda orde u_{xx} , u_{xy} , u_{yx} e u_{yy} , e así sucesivamente. Por outra parte recordamos a definición do operador bilaplaciano da función regular u no punto (a, b) ,

$$\Delta^2 u(a, b) = u_{xxxx}(a, b) + 2u_{xxyy}(a, b) + u_{yyyy}(a, b). \quad (3.1)$$

3.1. Construción dunha malla

A partir de agora consideramos soamente o caso dunha placa rectangular. Sexa $\omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$ o dominio correspondente á sección media da placa. Consideramos unha malla uniforme con $N + 2$ puntos na dirección x e $M + 2$ puntos na dirección y de modo que as lonxitudes internodais son $h_x = \frac{L_x}{N+1}$ e $h_y = \frac{L_y}{M+1}$ respectivamente. Supoñemos que se verifica que $h_x = h_y = h$, así podemos definir a malla como

$$\omega_h = \{(hi, hj), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M\}.$$

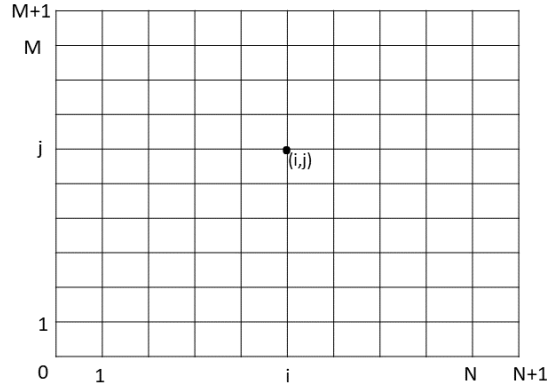


Figura 3.1: Malla uniforme ω_h e conxunto fronteira $\partial\omega_h$.

Empregando esta notación, un punto do interior do conxunto (i, j) ten por coordenadas (hi, hj) para $i = 1 \dots N, j = 1 \dots M$ e un punto da fronteira pertence ao conxunto

$$\partial\omega_h = \{(0, hj), (L_x, hj), 0 \leq j \leq M + 1\} \cup \{(hi, 0), (hi, L_y), 0 \leq i \leq N + 1\}.$$

En $\partial\omega_h$ a solución é coñecida; entón para ter unha solución do problema é suficiente con calcular a solución nos puntos de ω_h .

3.2. Discretización do operador bilaplaciano

Para a discretización do operador bilaplaciano empregaremos un desenvolvemento de Taylor de orde 6 para unha función no punto (i, j) , coa malla que xa construímos.

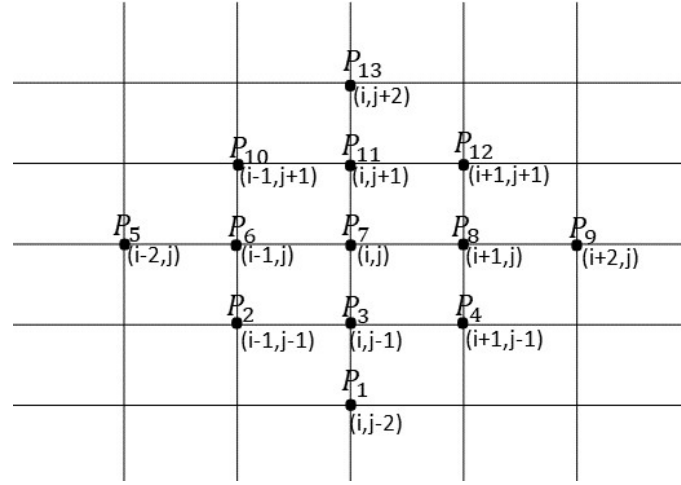


Figura 3.2: Esquema de trece puntos.

O desenvolvemento de Taylor de orde 6 proporciónanos un esquema de trece puntos. Para a discretización empregamos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Sexa S un rectángulo aberto que conteña a P_1, \dots, P_{13} puntos do esquema representado na Figura 3.2 con $P_7 = (a, b)$, e sexa $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ unha función de clase 6 en S . Entón existen $c_1, \dots, c_{13} \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\sum_{i=1}^{13} c_i v(P_i) = h^4 (v_{xxxx}(a, b) + 2v_{xxyy}(a, b) + v_{yyyy}(a, b)) + O(h^6). \quad (3.2)$$

Demostración. Escribimos primeiro o desenvolvemento de Taylor de orde 6 para unha

función v de dúas variables arredor de (a, b) avaliado no punto $(a + h, b + k)$,

$$\begin{aligned}
v(a + h, b + k) = & v(a, b) + h v_x(a, b) + k v_y(a, b) + \\
& + \frac{1}{2!} (h^2 v_{xx}(a, b) + 2hk v_{xy}(a, b) + k^2 v_{yy}(a, b)) \\
& + \frac{1}{3!} (h^3 v_{xxx}(a, b) + 3h^2k v_{xxy}(a, b) + 3hk^2 v_{xyy}(a, b) + k^3 v_{yyy}(a, b)) \\
& + \frac{1}{4!} (h^4 v_{xxxx}(a, b) + 4h^3k v_{xxxxy}(a, b) + 6h^2k^2 v_{xxxyy}(a, b) + 4hk^3 v_{xyyyy}(a, b) + \\
& + k^4 v_{yyyy}(a, b)) + \frac{1}{5!} (h^5 v_{xxxxx}(a, b) + 5h^4k v_{xxxxy}(a, b) + \\
& + 10h^3k^2 v_{xxxyy}(a, b) + 10h^2k^3 v_{xxyyy}(a, b) + 5hk^4 v_{xyyyy}(a, b) + \\
& + k^5 v_{yyyyy}(a, b)) + O(h^\alpha k^{6-\alpha}),
\end{aligned}$$

sendo α índice de suma, $\alpha = 0, 1, \dots, 6$ no termo do resto.

Agora aplicamos a expresión anterior a cada un dos puntos do esquema anteriormente definido de 13 puntos:

$$\begin{aligned}
v(P_1) = & v(a, b) - 2h v_y(a, b) + \frac{(-2h)^2}{2!} v_{yy}(a, b) + \frac{(-2h)^3}{3!} v_{yyy}(a, b) + \frac{(-2h)^4}{4!} v_{yyyy}(a, b) + \\
& + \frac{(-2h)^5}{5!} v_{yyyyy}(a, b) + O(h^6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(P_2) = & v(a, b) - h (v_x(a, b) + v_y(a, b)) + \\
& + \frac{(-h)^2}{2!} (v_{xx}(a, b) + 2v_{xy}(a, b) + v_{yy}(a, b)) + \\
& + \frac{(-h)^3}{3!} (v_{xxx}(a, b) + 3v_{xxy}(a, b) + 3v_{xyy}(a, b) + v_{yyy}(a, b)) + \\
& + \frac{(-h)^4}{4!} (v_{xxxx}(a, b) + 4v_{xxxxy}(a, b) + 6v_{xxxyy}(a, b) + 4v_{xxyyy}(a, b) + v_{yyyy}(a, b)) + \\
& + \frac{(-h)^5}{5!} (v_{xxxxx}(a, b) + 5v_{xxxxy}(a, b) + 10v_{xxxyy}(a, b) + 10v_{xxyyy}(a, b) + \\
& + 5v_{xyyyy}(a, b) + v_{yyyyy}(a, b)) + O(h^6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(P_3) = & v(a, b) - h v_y(a, b) + \frac{(-h)^2}{2!} v_{yy}(a, b) + \frac{(-h)^3}{3!} v_{yyy}(a, b) + \frac{(-h)^4}{4!} v_{yyyy}(a, b) + \\
& + \frac{(-h)^5}{5!} v_{yyyyy}(a, b) + O(h^6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(P_4) &= v(a, b) + h(v_x(a, b) - v_y(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^2}{2!}(v_{xx}(a, b) - 2v_{xy}(a, b) + v_{yy}(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^3}{3!}(v_{xxx}(a, b) - 3v_{xxy}(a, b) + 3v_{xyy}(a, b) - v_{yyy}(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^4}{4!}(v_{xxxx}(a, b) - 4v_{xxxy}(a, b) + 6v_{xxyy}(a, b) - 4v_{xyyy}(a, b) + v_{yyyy}(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^5}{5!}(v_{xxxxx}(a, b) - 5v_{xxxxy}(a, b) + 10v_{xxxyy}(a, b) - 10v_{xxyyy}(a, b) + \\
&\quad + 5v_{xyyyy}(a, b) - v_{yyyyy}(a, b)) + O(h^6), \\
v(P_5) &= v(a, b) - 2h v_x(a, b) + \frac{(-2h)^2}{2!} v_{xx}(a, b) + \frac{(-2h)^3}{3!} v_{xxx}(a, b) + \frac{(-2h)^4}{4!} v_{xxxx}(a, b) + \\
&\quad + \frac{(-2h)^5}{5!} v_{xxxxx}(a, b) + O(h^6), \\
v(P_6) &= v(a, b) - h v_x(a, b) + \frac{(-h)^2}{2!} v_{xx}(a, b) + \frac{(-h)^3}{3!} v_{xxx}(a, b) + \frac{(-h)^4}{4!} v_{xxxx}(a, b) + \\
&\quad + \frac{(-h)^5}{5!} v_{xxxxx}(a, b) + O(h^6), \\
v(P_7) &= v(a, b), \\
v(P_8) &= v(a, b) + h v_x(a, b) + \frac{h^2}{2!} v_{xx}(a, b) + \frac{h^3}{3!} v_{xxx}(a, b) + \frac{h^4}{4!} v_{xxxx}(a, b) + \frac{h^5}{5!} v_{xxxxx}(a, b) + \\
&\quad + O(h^6), \\
v(P_9) &= v(a, b) + 2h v_x(a, b) + \frac{(2h)^2}{2!} v_{xx}(a, b) + \frac{(2h)^3}{3!} v_{xxx}(a, b) + \frac{(2h)^4}{4!} v_{xxxx}(a, b) + \\
&\quad + \frac{(2h)^5}{5!} v_{xxxxx}(a, b) + O(h^6), \\
v(P_{10}) &= v(a, b) - h(v_x(a, b) - v_y(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^2}{2!}(v_{xx}(a, b) - 2v_{xy}(a, b) + v_{yy}(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^3}{3!}(-v_{xxx}(a, b) + 3v_{xxy}(a, b) - 3v_{xyy}(a, b) + v_{yyy}(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^4}{4!}(v_{xxxx}(a, b) - 4v_{xxxy}(a, b) + 6v_{xxyy}(a, b) - 4v_{xyyy}(a, b) + v_{yyyy}(a, b)) + \\
&\quad + \frac{h^5}{5!}(-v_{xxxxx}(a, b) + 5v_{xxxxy}(a, b) - 10v_{xxxyy}(a, b) + 10v_{xxyyy}(a, b) - 5v_{xyyyy}(a, b) + \\
&\quad + v_{yyyyy}(a, b)) + O(h^6), \\
v(P_{11}) &= v(a, b) + h v_y(a, b) + \frac{h^2}{2!} v_{yy}(a, b) + \frac{h^3}{3!} v_{yyy}(a, b) + \frac{h^4}{4!} v_{yyyy}(a, b) + \frac{h^5}{5!} v_{yyyyy}(a, b) + \\
&\quad + O(h^6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(P_{12}) = & v(a, b) + h(v_x(a, b) + v_y(a, b)) + \\
& + \frac{h^2}{2!}(v_{xx}(a, b) + 2v_{xy}(a, b) + v_{yy}(a, b)) + \\
& + \frac{h^3}{3!}(v_{xxx}(a, b) + 3v_{xxy}(a, b) + 3v_{xyy}(a, b) + v_{yyy}(a, b)) + \\
& + \frac{h^4}{4!}(v_{xxxx}(a, b) + 4v_{xxx}(a, b) + 6v_{xxyy}(a, b) + 4v_{xyyy}(a, b) + v_{yyyy}(a, b)) + \\
& + \frac{h^5}{5!}(v_{xxxxx}(a, b) + 5v_{xxxxy}(a, b) + 10v_{xxxyy}(a, b) + 10v_{xxyyy}(a, b) + 5v_{xyyyy}(a, b) + \\
& + v_{yyyyy}(a, b)) + O(h^6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(P_{13}) = & v(a, b) + 2h v_y(a, b) + \frac{(2h)^2}{2!} v_{yy}(a, b) + \frac{(2h)^3}{3!} v_{yyy}(a, b) + \frac{(2h)^4}{4!} v_{yyyy}(a, b) + \\
& + \frac{(2h)^5}{5!} v_{yyyyy}(a, b) + O(h^6).
\end{aligned}$$

Tendo en conta as expresións para $v(P_i)$, $i = 1 \dots 13$ anteriores, obtemos un sistema de ecuacións lineais sendo c_i , $i = 1 \dots 13$ as incógnitas. Identificamos en ambos membros da expresión (3.2) os coeficientes das derivadas que aparecen ata orde 4:

$$\begin{array}{l}
v \rightarrow \\
v_x \rightarrow \\
v_y \rightarrow \\
v_{xx} \rightarrow \\
v_{xy} \rightarrow \\
v_{yy} \rightarrow \\
v_{xxx} \rightarrow \\
v_{xxy} \rightarrow \\
v_{xyy} \rightarrow \\
v_{yyy} \rightarrow \\
v_{xxxx} \rightarrow \\
v_{xxx} \rightarrow \\
v_{xxy} \rightarrow \\
v_{xyy} \rightarrow \\
v_{yyy} \rightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & -h & 0 & h & -2h & -h & 0 & h & 2h & -h & 0 & h & 0 \\
-2h & -h & -h & -h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & h & h & 2h \\
0 & \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & 2h^2 & \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & 2h^2 & \frac{h^2}{2} & 0 & \frac{h^2}{2} & 0 \\
0 & h^2 & 0 & -h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h^2 & 0 & h^2 & 0 \\
2h^2 & \frac{h^2}{2} & \frac{h^2}{2} & \frac{h^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{2} & \frac{h^2}{2} & \frac{h^2}{2} & 2h^2 \\
0 & \frac{-h^3}{6} & 0 & \frac{h^3}{6} & \frac{-4h^3}{3} & \frac{-h^3}{6} & 0 & \frac{h^3}{6} & \frac{4h^3}{3} & \frac{-h^3}{6} & 0 & \frac{h^3}{6} & 0 \\
0 & \frac{-h^3}{2} & 0 & \frac{-h^3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{2} & 0 & \frac{h^3}{2} & 0 \\
0 & \frac{-h^3}{2} & 0 & \frac{h^3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-h^3}{2} & 0 & \frac{h^3}{2} & 0 \\
\frac{-4h^3}{3} & \frac{-h^3}{6} & \frac{-h^3}{6} & \frac{-h^3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{6} & \frac{h^3}{6} & \frac{h^3}{6} & \frac{4h^3}{3} \\
0 & \frac{h^4}{24} & 0 & \frac{h^4}{24} & \frac{2h^4}{3} & \frac{h^4}{24} & 0 & \frac{h^4}{24} & \frac{2h^4}{3} & \frac{h^4}{24} & 0 & \frac{h^4}{24} & 0 \\
0 & \frac{h^4}{6} & 0 & \frac{-h^4}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-h^4}{6} & 0 & \frac{h^4}{6} & 0 \\
0 & \frac{h^4}{4} & 0 & \frac{h^4}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^4}{4} & 0 & \frac{h^4}{4} & 0 \\
0 & \frac{h^4}{6} & 0 & \frac{-h^4}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-h^4}{6} & 0 & \frac{h^4}{6} & 0 \\
\frac{2h^4}{3} & \frac{h^4}{24} & \frac{h^4}{24} & \frac{h^4}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^4}{24} & \frac{h^4}{24} & \frac{h^4}{24} & \frac{2h^4}{3}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_1 \\
c_2 \\
c_3 \\
c_4 \\
c_5 \\
c_6 \\
c_7 \\
c_8 \\
c_9 \\
c_{10} \\
c_{11} \\
c_{12} \\
c_{13}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
h^4 \\
0 \\
2h^4 \\
0 \\
h^4
\end{pmatrix}$$

Xa que as filas 5, 12 e 14 da matriz ampliada do sistema son linealmente dependentes, podemos prescindir delas quedando un sistema de ecuacións lineal con 13 ecuacións e 13

incógnitas. Simplificando h coas súas correspondentes potencias, podemos escribir:

$$\begin{array}{l}
 v \rightarrow \\
 v_x \rightarrow \\
 v_y \rightarrow \\
 v_{xx} \rightarrow \\
 v_{xy} \rightarrow \\
 v_{yy} \rightarrow \\
 v_{xxx} \rightarrow \\
 v_{xxy} \rightarrow \\
 v_{xyy} \rightarrow \\
 v_{yyy} \rightarrow \\
 v_{xxxx} \rightarrow \\
 v_{xxyy} \rightarrow \\
 v_{yyyy} \rightarrow
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{2}{3} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & \frac{2}{3} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{2}{3} \end{matrix}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sistema anterior é compatible determinado xa que o determinante da matriz asociada é $\frac{1}{3}$ e polo tanto distinto de 0. Así obtemos os valores seguintes das constantes:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 1 \\
 c_2 &= 2 \\
 c_3 &= -8 \\
 c_4 &= 2 \\
 c_5 &= 1 \\
 c_6 &= -8 \\
 c_7 &= 20 \\
 c_8 &= -8 \\
 c_9 &= 1 \\
 c_{10} &= 2 \\
 c_{11} &= -8 \\
 c_{12} &= 2 \\
 c_{13} &= 1
 \end{aligned}$$

Comprobamos que se anulan os termos correspondentes ás derivadas de orde 5 tendo en conta as constantes que calculamos anteriormente.

Coefficientes de v_{xxxxx} :

$$c_5 \frac{(-5h)^5}{5!} + c_6 \frac{(-h)^5}{5!} + c_8 \frac{h^5}{5!} + c_9 \frac{(2h)^5}{5!} + c_4 \frac{h^5}{5!} + c_{10} \frac{(-h)^5}{5!} + c_{12} \frac{h^5}{5!} = \frac{h^5}{5!} (-2^5 c_5 - c_6 + c_8 + 2^5 c_9 - c_2 + c_4 - c_{10} + c_{12}) = 0$$

Coefficientes de v_{xxxxy} :

$$c_2 \frac{5h^5}{5!} - c_4 \frac{5h^5}{5!} + c_{10} \frac{5h^5}{5!} + c_{12} \frac{5h^5}{5!} = \frac{5h^5}{5!} (-c_2 - c_4 + c_{10} + c_{12}) = 0$$

Coefficientes de v_{xxxxy} :

$$c_2 \frac{-10h^5}{5!} + c_4 \frac{10h^5}{5!} - c_{10} \frac{-10h^5}{5!} + c_{12} \frac{10h^5}{5!} = \frac{10h^5}{5!} (-c_2 + c_4 - c_{10} + c_{12}) = 0$$

Coefficientes de v_{xyyyy} :

$$c_2 \frac{-10h^5}{5!} + c_4 \frac{10h^5}{5!} - c_{10} \frac{-10h^5}{5!} + c_{12} \frac{10h^5}{5!} = \frac{10h^5}{5!} (-c_2 + c_4 - c_{10} + c_{12}) = 0$$

Coefficientes de v_{xyyyy} :

$$c_2 \frac{-5h^5}{5!} + c_4 \frac{5h^5}{5!} + c_{10} \frac{-5h^5}{5!} + c_{12} \frac{5h^5}{5!} = \frac{5h^5}{5!} (-c_2 + c_4 - c_{10} + c_{12}) = 0$$

Coefficientes de v_{yyyyy} :

$$c_5 \frac{(-2h)^5}{5!} + c_6 \frac{(-h)^5}{5!} + c_8 \frac{h^5}{5!} + c_9 \frac{(2h)^5}{5!} + c_4 \frac{(-h)^5}{5!} + c_{10} \frac{(-h)^5}{5!} + c_{12} \frac{h^5}{5!} = \frac{h^5}{5!} (-2^5 c_5 - c_6 + c_8 + 2^5 c_9 - c_2 + c_4 - c_{10} + c_{12}) = 0 \quad \square$$

Para toda función u definimos

$$U_{ij} = u(hi, hj), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M,$$

sendo $(hi, hj), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$ puntos da malla ω_h . Ademais dotámoslos da orde seguinte:

$$\tilde{u} = [U_{11}, U_{21}, \dots, U_{N1}, U_{12}, \dots, U_{N2}, \dots, U_{NM}]^t.$$

Coa devandita notación U_{ij} é a k -ésima compoñente de \tilde{u} , con $k = i + (j - 1)N$. Analogamente referímonos a calquera compoñente do vector de \mathbb{R}^{NM} con dobre índice (i, j) ou con

índice $k = i + (j - 1)N$ indistintamente. Definimos o operador lineal $L_h : \mathbb{R}^{NM} \rightarrow \mathbb{R}^{NM}$ como:

$$\begin{aligned} (L_h \tilde{u})_k = & \frac{1}{h^4} (20U_{i,j} - 8(U_{i-1,j} + U_{i+1,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1}) + \\ & + 2(U_{i-1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j+1}) + \\ & + (U_{i-2,j} + U_{i+2,j} + U_{i,j-2} + U_{i,j+2})), \end{aligned} \quad (3.3)$$

cuxa matriz asociada denotamos tamén por L_h se non houberse risco de confusión. Construímos a dita matriz na seguinte sección e veremos que a matriz resultante é pentadiagonal por bloques grazas á orden dos nodos elixida anteriormente. Empregando (3.3) e (3.2) obtemos que

$$(L_h \tilde{u})_k = \Delta^2 u(hi, hj) + O(h^2),$$

para toda función $u \in \mathcal{C}^6(\omega)$. Entón a discretización é consistente de orde dúas, é dicir, que o operador discreto aproxima ao continuo nos puntos da malla coa orde anterior (ver Lui [7]).

3.3. Construción da matriz L_h

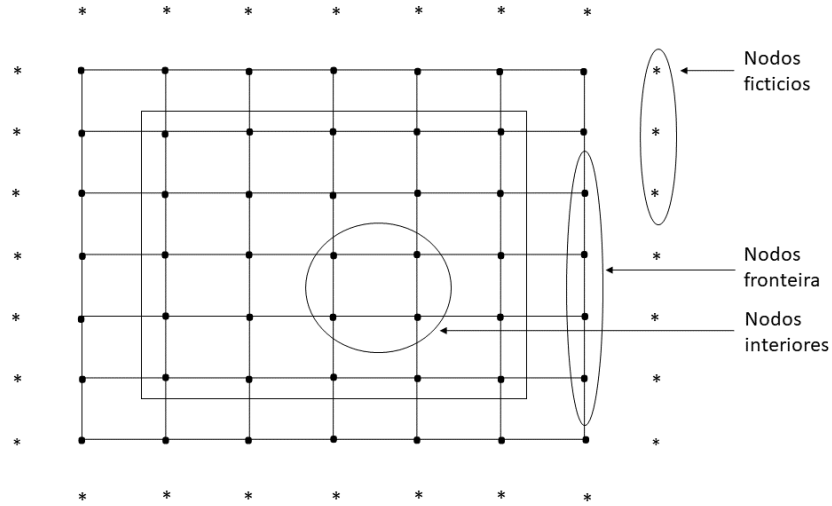


Figura 3.3: Malla ω_h xunto cos nodos ficticios.

No noso problema xa coñecemos a solución nos puntos da fronteira así como a súa derivada normal nos mesmos, entón abonda con resolver o problema para os puntos do interior do

conxunto ω . Para iso empregaremos a malla ω_h que construímos anteriormente.

Para o nodo $(1, 1)$ de (3.3) obtemos,

$$(L_h \tilde{u})_{1,1} h^4 = 20U_{1,1} - 8(U_{1,2} + U_{0,1+U_{2,1}+U_{1,0}}) + 2(U_{0,0} + U_{0,2} + U_{2,0} + U_{2,2}) + \\ + (U_{-1,1} + U_{3,1} + U_{1,-1} + U_{1,3}).$$

Impondo as condicións sobre a fronteira obtemos que $U_{0,1} = U_{1,0} = U_{0,2} = U_{2,0} = U_{0,0} = 0$ e en $(0, 1)$ e $(1, 0)$ a derivada normal é cero. Tendo en conta os nodos ficticios, que se denotan por * na Figura 3.3 fóra de ω , e aplicando unha fórmula de derivación numérica centrada de orde dúas, temos que:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial n}|_{(1,0)} = \frac{U_{1,1} - U_{1,-1}}{2h} \Rightarrow U_{1,1} = U_{1,-1},$$

razón pola que para este nodo a expresión queda:

$$(L_h)_{(1,1)} h^4 = 22U_{1,1} - 8(U_{1,2} + U_{2,1}) + 2U_{2,2} + U_{3,1} + U_{1,3}.$$

Así a primeira fila da matriz queda:

$$\underbrace{(22 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \dots 0)}_N | \underbrace{(-8 \quad 2 \quad 0 \dots 0)}_N | \underbrace{(1 \quad 0 \dots 0)}_N | 0 \dots 0).$$

Para o nodo $(2, 1)$:

$$(L_h \tilde{u})_{2,1} h^4 = 20U_{2,1} - 8(U_{1,1} + U_{2,2} + U_{3,1} + U_{2,0}) + 2(U_{1,0} + U_{3,2} + U_{3,0} + U_{1,2}) + \\ + (U_{0,1} + U_{4,1} + U_{2,-1} + U_{2,3}).$$

Analogamente ao caso anterior $U_{0,1} = U_{1,0} = U_{3,0} = U_{2,0} = 0$ e $U_{2,-1} = U_{2,1}$ polo que

$$(L_h)_{(2,1)} h^4 = 21U_{2,1} - 8(U_{1,1} + U_{3,1} + U_{2,2}) + 2(U_{3,2} + U_{1,2}) + U_{4,1} + U_{2,3}.$$

Así a segunda fila da matriz queda:

$$\underbrace{(-8 \quad 21 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \dots 0)}_N | \underbrace{(2 \quad -8 \quad 2 \quad 0 \dots 0)}_N | \underbrace{(0 \quad 1 \quad 0 \dots 0)}_N | 0 \dots 0).$$

Para o nodo $(3, 1)$:

$$(L_h \tilde{u})_{3,1} h^4 = 20U_{3,1} - 8(U_{2,1} + U_{3,0} + U_{4,1} + U_{3,2}) + 2(U_{2,0} + U_{4,0} + U_{4,2} + U_{2,2}) + \\ + (U_{1,1} + U_{3,-1} + U_{5,1} + U_{3,3}).$$

sendo $U_{2,0} = U_{3,0} = U_{4,0} = 0$ e $U_{3,-1} = U_{3,1}$, polo que:

$$(L_h)_{(3,1)} h^4 = 21U_{3,1} - 8(U_{2,1} + U_{4,1} + U_{3,2}) + 2(U_{4,2} + U_{2,2}) + U_{1,1} + U_{3,3} + U_{5,3}$$

Así a terceira fila da matriz queda:

$$\underbrace{(1 \quad -8 \quad 21 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \dots 0)}_N | \underbrace{0 \quad 2 \quad -8 \quad 2 \quad 0 \dots 0}_N | \underbrace{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0}_N | 0 \dots 0).$$

Para o nodo $(1, 2)$:

$$(L_h \tilde{u})_{(1,2)} h^4 = 20U_{1,2} - 8(U_{1,1} + U_{2,2} + U_{1,3} + U_{0,2}) + 2(U_{0,1} + U_{2,1} + U_{2,3} + U_{0,3}) + (U_{1,0} + U_{3,2} + U_{1,4} + U_{-1,2}),$$

sendo $U_{0,2} = U_{0,1} = U_{0,3} = U_{1,0} = 0$ e $U_{-1,2} = U_{1,2}$.

Polo que:

$$(L_h \tilde{u})_{(1,2)} h^4 = 21U_{1,2} - 8(U_{1,1} + U_{2,2} + U_{1,3}) + 2(U_{2,1} + U_{2,3}) + U_{3,2} + U_{1,4},$$

que aportará os seguintes elementos a fila $N + 1$ da matriz:

$$\underbrace{(-8 \quad 2 \quad 0 \dots 0)}_N | \underbrace{21 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \dots 0}_N | \underbrace{-8 \quad 2 \quad 0 \dots 0}_N | \underbrace{1 \quad 0 \dots 0}_N | 0 \dots 0).$$

A construción das filas correspondentes ao resto de nodos é similar ao feito excepto o nodo $(3, 3)$, xa que o seu esquema non ten ningún nodo fronteira:

$$(L_h \tilde{u})_{(3,3)} h^4 = 20U_{3,3} - 8(U_{3,2} + U_{4,3} + U_{3,4} + U_{2,3}) + 2(U_{2,2} + U_{4,2} + U_{4,4} + U_{2,4}) + (U_{3,1} + U_{5,3} + U_{3,5} + U_{1,3}),$$

que aportará os seguintes elementos a fila $2N + 3$ da matriz:

$$\underbrace{(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0)}_N | \underbrace{0 \quad 2 \quad -8 \quad 2 \quad 0 \dots 0}_N | \underbrace{1 \quad -8 \quad 20 \quad -8 \quad 1 \quad 0 \dots 0}_N | \underbrace{0 \quad 2 \quad -8 \quad 2 \quad 0 \dots 0}_N | \underbrace{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \dots 0}_N | 0 \dots 0).$$

Facendo este razoamento para o resto dos nodos, obtemos unha matriz por bloques da forma:

$$L_h = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} B_1 & C & I & & & \dots & 0 \\ C & B & \ddots & & & \dots & \\ I & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & & \dots & 0 & I & C & B & C \\ 0 & & \dots & & 0 & I & C & B_1 \end{bmatrix}_{(NM) \times (NM)}$$

con $B_1, B, C, I \in \mathcal{M}_{N \times N}$, sendo:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 22 & -8 & 1 & 0 & & & \dots & 0 \\ -8 & 21 & -8 & 1 & & & \dots & \\ 1 & -8 & 21 & -8 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -8 & 21 & -8 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & \dots & & 1 & -8 & 21 & -8 \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -8 & 22 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$B = \begin{bmatrix} 21 & -8 & 1 & 0 & & & \dots & 0 \\ -8 & 20 & -8 & 1 & & & \dots & \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \\ & & \dots & & 1 & -8 & 20 & -8 \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -8 & 21 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 0 & & & \dots & 0 \\ 2 & -8 & 2 & & & & \\ 0 & 2 & -8 & 2 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & & 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & & \dots & & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

onde I denota a matriz identidade de orde N . Por outra banda, a matriz que se obtén discretizando o operador laplaciano, coa función anulándose na fronteira do dominio, cun

esquema de 5 puntos, é a seguinte:

$$\Delta_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & I & 0 & & \dots & 0 \\ I & T & I & & & \\ 0 & I & T & I & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & I & T & I \\ 0 & \dots & & 0 & I & T \end{bmatrix}_{(NM) \times (NM)}$$

sendo

$$T = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & & & \\ 0 & 1 & -4 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -4 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Verifícase

$$\Delta_h \cdot \Delta_h = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} T^2 + I & 2T & I & 0 & & \dots & 0 \\ 2T & T^2 + I & \ddots & \ddots & & \dots & \\ I & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & & \dots & 0 & I & 2T & T^2 + I & 2T \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & I & 2T & T^2 + I \end{bmatrix}_{(NM) \times (NM)} =$$

$$= \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & C & I & & & \dots & 0 \\ C & \tilde{B} & \ddots & \ddots & & & \dots \\ I & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ & & & & \vdots & & \\ 0 & & \dots & 0 & I & C & \tilde{B} & C \\ 0 & & \dots & & 0 & I & C & \tilde{B}_1 \end{bmatrix}_{(NM) \times (NM)}$$

sendo

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 18 & -8 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ -8 & 19 & -8 & 1 & & & \\ 1 & -8 & 19 & -8 & 1 & & \\ 0 & 1 & -8 & 19 & -8 & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & -8 & 19 & -8 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & -8 & 18 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

onde $\tilde{B} = \tilde{B}_1 + I$.

Entón verificase que

$$L_h = \Delta_h \cdot \Delta_h + D_h,$$

sendo D_h unha matriz diagonal con $D_h = \frac{1}{h^4}(d_{ii})$;

$$d_{ii} = \begin{cases} 4 & \text{se o nodo correspondente é unha esquina,} \\ 2 & \text{se o nodo correspondente é un lado,} \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Polo tanto, dado un vector $u_h \in \mathbb{R}^{N \times M}$, temos que

$$\begin{aligned} u_h^t L_h u_h &= u_h^t \Delta_h^2 u_h + u_h^t D_h u_h \\ &= u_h^t \Delta_h^t \Delta_h u_h + u_h^t D_h u_h \\ &= (\Delta_h u_h)^t \Delta_h u_h + \frac{4}{h^4} \sum_{(i,j) \in E} u_h^2(i,j) + \frac{2}{h^4} \sum_{(i,j) \in L} u_h^2(i,j) \geq |\Delta_h u_h|_2^2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

denotando por L o conxunto de nodos laterais e por E os nodos esquina, e $|\cdot|_2$ a norma euclídea para vectores e matrices.

Sábese que (ver Lui [7])

$$\frac{|\Delta_h^{-1}x|_2}{|x|_2} \leq \sup \frac{|\Delta_h^{-1}x|_2}{|x|_2} = |\Delta_h^{-1}|_2 \leq \frac{1}{8},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e $h \leq 1$. Polo tanto,

$$|x|_2 \geq 8 |\Delta_h^{-1}x|_2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Tomando $x = \Delta_h u_h$, obtemos que,

$$|\Delta_h u_h|_2 \geq 8 |\Delta_h^{-1} \Delta_h u_h|_2 \geq 8 |u_h|_2.$$

Para rematar, de (3.4) deducimos que:

$$u_h^t L_h u_h \geq |\Delta_h u_h|_2^2 \geq 8^2 |u_h|_2^2.$$

Entón temos visto que L_h é unha matriz simétrica, tal que se $u_h \neq 0$ verificase que:

$$u_h^t L_h u_h > 0,$$

así L_h é definida positiva. Entón a versión discreta do problema (2.23) é:

$$\begin{cases} \text{Atopar } u_h \in \mathbb{R}^{N \times M} \text{ tal que} \\ \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} L_h u_h = f_h, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde $(f_h)_k = F_3(hi, hj)$, $k = 1 + (j - 1)N$, para $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$. Como a matriz do sistema é simétrica e definida positiva, podemos concluír que o sistema (3.5) ten solución única. Por outra banda podemos aplicar o método de Cholesky, o que proporciona boas condicións de estabilidade numérica para resolver este tipo de sistemas.

Capítulo 4

Exemplos numéricos

4.1. Exemplo analítico de comprobación

Neste capítulo empezamos comprobando, mediante un exemplo cuxa solución coñecemos de antemán, a bondade dos cálculos realizados nos capítulos anteriores. Isto permitiranos verificar se está ben aproximado o problema (2.23) e tamén se a orde de converxencia é a esperada.

Consideramos $\omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e a función

$$u(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y), \quad (4.1)$$

sendo o seu bilaplaciano,

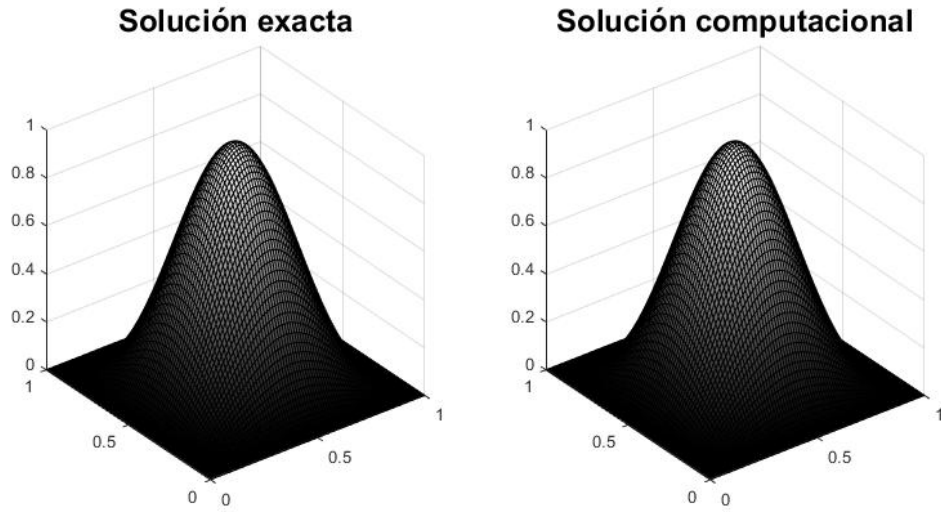
$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x, y) = & 8\pi^4 (3 \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) + \cos^2(\pi x) \cos^2(\pi y) \\ & - 2 \cos^2(\pi x) \sin^2(\pi y) - 2 \cos^2(\pi y) \sin^2(\pi x)). \end{aligned}$$

Para que a función (4.1) sexa solución do problema (2.23) debemos tomar,

$$F_3 = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} \Delta^2 u(x, y).$$

Por simplicidade, neste primeiro exemplo supoñemos que a constante que multiplica ao bilaplaciano é a unidade, é dicir, $\frac{2}{3} \frac{\varepsilon^3 E}{1 - \nu^2} = 1$. Recordemos que para resolver o problema teórico impuxemos as condicións de que tanto a función como a súa derivada se anulan sobre $\partial\omega$.

Para resolver de forma numérica o problema consideramos a malla que construímos no capítulo anterior, coa notación $(f_h)_k = F_3(ih, jh)$ con $k = i + (j - 1)N$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, e resolvemos o sistema para obter unha solución aproximada u_h .



Para comprobar a converxencia do método, vemos a relación entre algúns valores de N e M e o erro cometido na aproximación. Este valor calculámolo mediante a norma euclídea e a discreta de L^2 , recordamos a definición desta última:

$$|x|_h = h |x|_2.$$

Na seguinte táboa mostramos a norma euclídea e a norma L^2 discreta do erro cometido

$$e_h = u_h - u$$

sendo u a solución exacta de (1.7) e u_h a solución aproximada. O erro relativo coa norma euclídea sería:

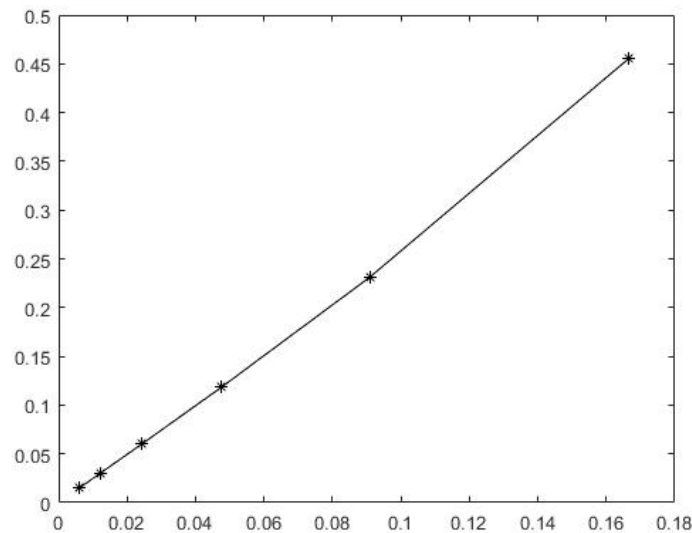
$$e_{r,2} = \frac{|e_h|_2}{|u|_2}$$

para os diferentes valores de M e N , obtemos así a seguinte táboa,

N	M	h	$ e_h _2$	$ e_h _h$	$e_{r,2}$
5	5	0.1667	0.4558	0.0759	0.2026
10	10	0.0909	0.2312	0.0210	0.0560
20	20	0.0476	0.1185	0.0056	0.0150
40	40	0.0244	0.0603	0.0015	0.0039
80	80	0.0123	0.0304	0.0004	0.0010
160	160	0.0062	0.0153	0.0001	0.0003

Táboa 4.1: Erros para o exemplo numérico.

Na Figura (4.1) representamos $|e_h|_2$ fronte a h obténdose unha recta de pendente 1, o cal indica que o método é converxente de orde 1 coa norma euclídea. Na Figura (4.2) representamos a norma L^2 discreta do erro fronte a h en escala lineal. Na Figura (4.3) representamos o mesmo en escala log-log. A pendente da recta na Figura (4.3) é 2, polo que se confirma que o método é converxente de orde 2 na norma L^2 discreta, (ver Lui [7], p.32).

Figura 4.1: Norma euclídea do erro fronte h .

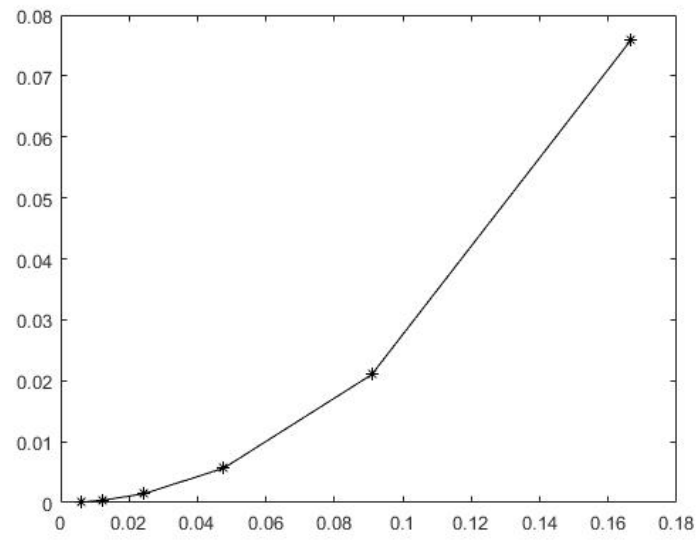


Figura 4.2: Norma L^2 discreta do erro fronte h .

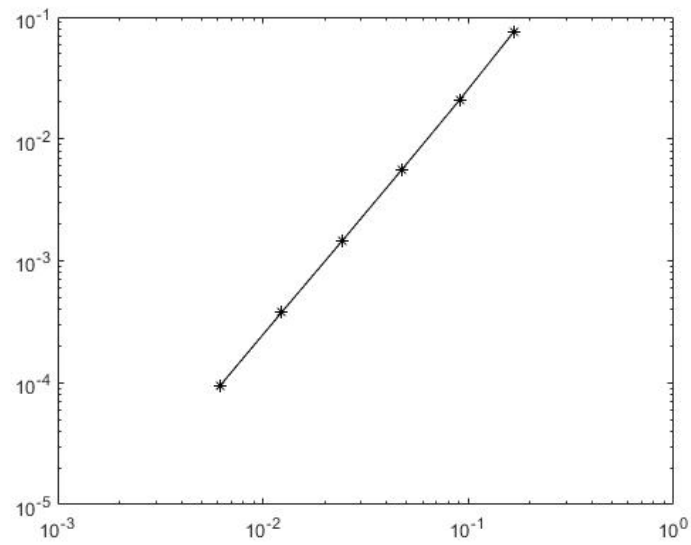


Figura 4.3: Norma L^2 discreta do erro fronte h en escala log-log.

4.2. Exemplos de placas

A continuación vemos que ocorre cunha placa de silicio ao aplicarlle distintos tipos de forzas: unha forza constante en toda a placa, unha forza arredor do centro da placa e nula no resto, e por último unha forza negativa arredor do centro da placa e positiva no resto. Tomamos unha placa cadrada de 10^{-3} m de lado. Vemos agora cales son as constantes físicas do material¹: o módulo de Young $E = 1,3 \times 10^{11}$ Pa, o coeficiente de Poisson $\mu = 0,25$, o semiespesor $\varepsilon = 0,5 \times 10^{-6}$ m e, por último, tomamos $N = M = 40$.

Consideramos agora un primeiro exemplo de forza: tomaremos $F_3 = -1000$ Pa, constante en toda a placa. Na Figura (4.4) mostramos a solución numérica correspondente. Observamos que a placa flexiona ata un desprazamento máximo menor que 10^{-4} m. Observamos tamén que a condición de empotramento se respeta nos bordes.

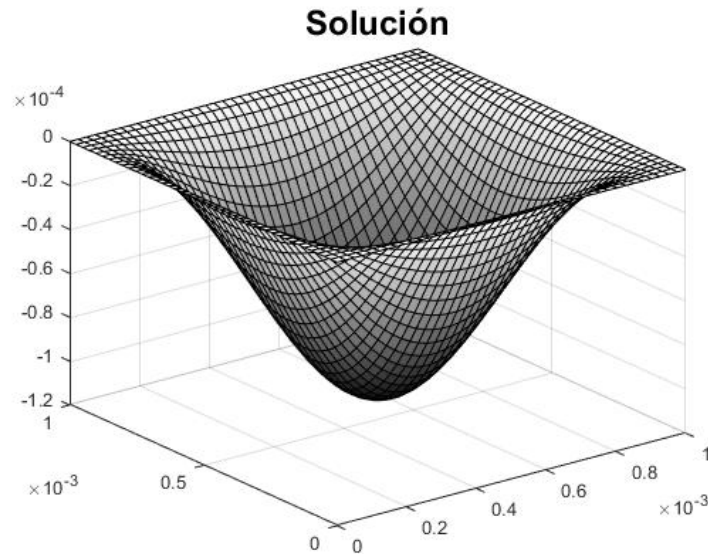


Figura 4.4: Solución correspondente á forza constante en toda a placa.

Consideramos agora unha forza constante arredor do centro da placa, $F_3 = -1000$ Pa, e nula no resto (ver Figura 4.5).

¹Pa=Pascal, m=metro.

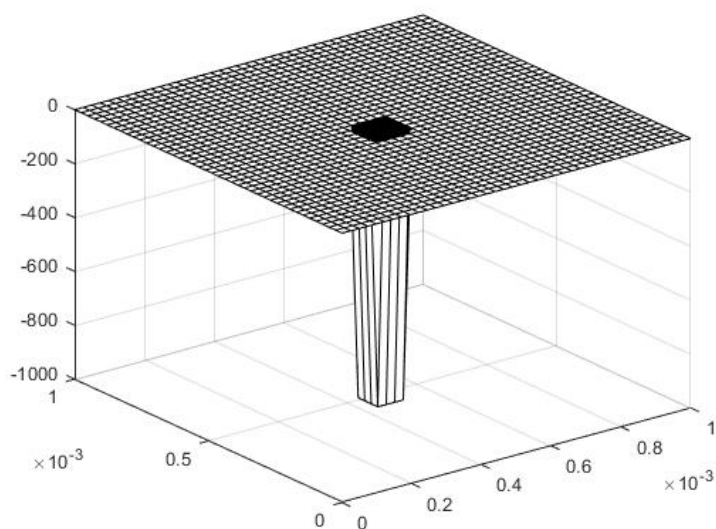


Figura 4.5: Forza arredor do centro da placa.

Na Figura 4.6 vemos a correspondente solución do problema ao aplicarlle a forza anterior. Observamos que a placa flexiona ata un desprazamento máximo menor que 4×10^{-6} m, inferior ao caso anterior.

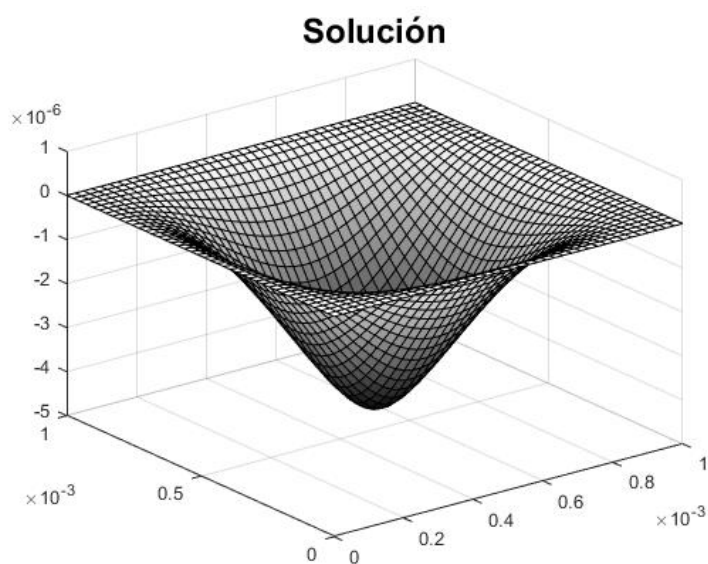


Figura 4.6: Solución u_h arredor do centro da placa.

Por último consideramos unha forza que toma arredor do centro da placa un valor negativo

$F_3 = -3000$ Pa e un valor positivo no resto $F_3 = 100$ Pa (ver Figura 4.7).

Na Figura 4.8 móstrase a solución correspondente a esta forza. Notemos que aparece un efecto de alabeado causado pola interacción de forzas de diferente sentido.

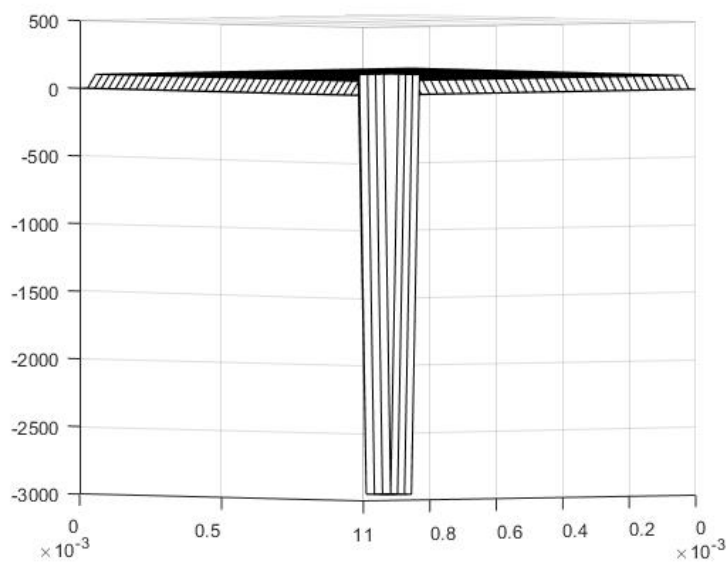


Figura 4.7: Forza negativa arredor do centro da placa e positiva no resto.

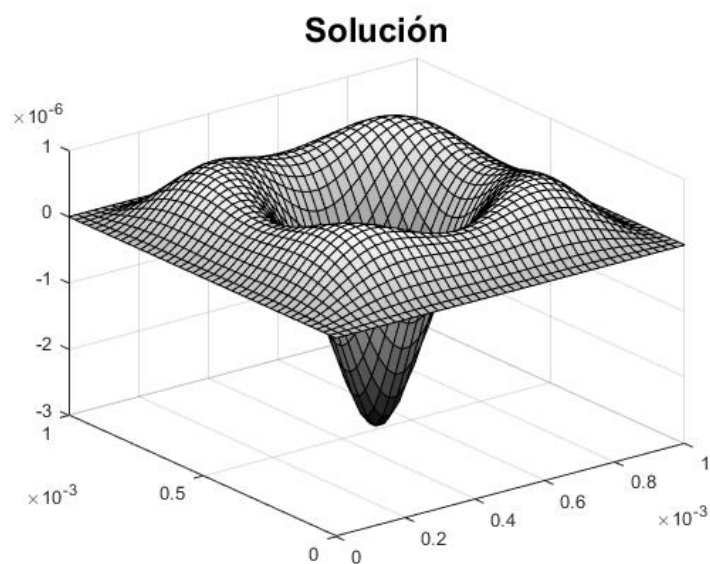


Figura 4.8: Solución correspondente á forza negativa arredor do centro da placa e positiva no resto.

Programas empregados

Programas para o exemplo de validación

45

```

%      step mesh size
%      dimensions of the plate 1 x 1 (without unit)
long=1.0;large=1.0;
hx=long/(nx+1);hy=large/(ny+1);
h2x=hx*hx;h2y=hy*hy;
h4x=h2x*h2x;h4y=h2y*h2y;h4xy=h2x*h2y;
%      points coordinates
x=[0.:hx:long];y=[0.:hy:large];
n=nx*ny;
fprintf('\n ');
fprintf('\n Points in x direction %d',nx);
fprintf('\n Points in y direction %d',ny);
fprintf('\n Total number of points %d',n);
fprintf('\n ');
%      computing time measure
t=cputime;
%      validation of the program
%      with a well-known solution
u=zeros(nx+2,ny+2);uh=u;u2h=u;
for ix=1:nx+2
for iy=1:ny+2
u(ix,iy)=ELAS_solution(x(ix),y(iy));
end
end

%      Bi-Laplacian operator matrix
Ah13=Bilap_matrix(hx,nx,ny);
%      Test problem matrix
c1=0.0;c2=1.0;
Ah=c2*Ah13;
%      Cholesky factorization - Matlab
Lh=chol(Ah');

rhs_bilaph=zeros(nx,ny);
for ix=1:nx
for iy=1:ny

```

```

rhs_bilaph(ix,iy)=ELAS_bilap_rhs(x(ix+1),y(iy+1));
end
end

for ix=1:nx
for iy=1:ny
rhs((iy-1)*nx+ix)=rhs_bilaph(ix,iy);
end
end
size(rhs)
size(Lh)
%    2) Solution of the linear system
%
vh=Lh'\rhs';
wh=Lh\vh;
for ix=1:nx
for iy=1:ny
uh(ix+1,iy+1)=wh((iy-1)*nx+ix);
end
end
%    error computation

e1=norm(u,2);
e2=norm(u-uh,2);
er=e2/e1;
fprintf('\n Error in norm 2 %12.8f',e2);
fprintf('\n Relative Error in 2 norm %12.8f',er);
%errores en norma L1
ehh=hx*norm(u-uh,2);
erh=ehh/(hx*norm(u,2));
fprintf('\n Error in discret L2 norm %12.8f',ehh);
fprintf('\n Relative error in discret norm L2 %12.8f',erh);
%    computing time measure
time=cputime-t;
fprintf('\n Computing time %12.8f',time);

```

```

%
%    3) Display of results
%
fs=18;
%    exact solution
figure(3);
colormap('gray');
surf(x,y,u'),axis([0 1 0 1 0 1]);
title('Solución exacta','FontSize',fs);
%    computed solution
figure(4);
colormap('gray');
surf(x,y,u'),axis([0 1 0 1 0 1]);
title('Solución computacional','FontSize',fs);
figure(5)
subplot(1,2,1)
colormap('gray');
surf(x,y,u'),axis([0 1 0 1 0 1]);
title('Solución exacta','FontSize',fs);
subplot(1,2,2)
colormap('gray');
surf(x,y,u'),axis([0 1 0 1 0 1]);
title('Solución computacional','FontSize',fs);

figure(6);
colormap('gray');
surf(x,y,abs(u-uh)'),axis([0 1 0 1 0 1]);
title('diferencia','FontSize',fs);
hp=[0.1667,0.0909,0.0476,0.0244,0.0123, 0.0062];
eh2p=[0.4558,0.2312,0.1185,0.0603,0.0304,0.0153];
ehhp=[0.0759,0.0210,0.0056,0.0015, 0.0004, 0.0002];
figure(7)
plot(hp,eh2p,'k-*')

figure(8)

```

Cálculo da solución exacta

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%           An Introduction to Scientific Computing          %%%%%%%%%%%%  
%       I. Danaila, P. Joly, S. M. Kaber & M. Postel      %%%%%%%%%%%%  
%                               Springer, 2005               %%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% Modificado por María del Carmen Mosquera Vázquez        %%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%  
  
function u=ELAS_solution(x,y);  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%  
%   function u=ELAS_solution(x,y)  
%  
%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%  
%  
% Definition of the solution at point M(x,y)  
% in order to solve exercise 1 of project 7  
% Solution of the plate problem (linear equation)  
% ELAS: elastic deformation of a thin plate  
%  
%  
% Input   : x, y coordinates of point M  
%  
% Output  : u   solution value in this point  
%            (see also procedures rhs.m and rhs2.m)  
%
```

```
u=sin(pi*x)^2*sin(pi*y)^2;
```

Construcción da matriz do operador bilaplaciano

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%  Function for construction of the biharmonic operator matrix in a rectangle
%%  with null boundary conditions for the function and its normal derivative
%%  using a 13-point scheme.
%%
%%  Input : h    mesh step size for both directions x and y
%%          nx, ny  numbers of points
%%
%%  Output : L_h    2D Bi-Laplacian operator matrix
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function L_h=Bilap_matrix(h,nx,ny);
n=nx*ny;
h2=h^2;
h4=h2^2;
c1=20.d0/h4;
c2=-8.d0/h4;
c3=1.d0/h4;

D=toeplitz( [c1 c2 c3 zeros(1,nx-3) ] );
DC=D+eye(nx)/h4;

DC(1,1)=DC(1,1)+1/h4;
DC(nx,nx)=DC(nx,nx)+1/h4;

DL=D;
DL(1,1)=DL(1,1)+1/h4;
DL(nx,nx)=DL(nx,nx)+1/h4;
c4=-8.d0/h4;
c5=2.d0/h4;

D1=toeplitz( [c4 c5 zeros(1,nx-2) ] );
c6=1.d0/h4;
```

```

D2=toeplitz( [c6 zeros(1,nx-1) ] );
for k=1:(ny-1)
i=(k-1)*nx ; j=k*nx ;
if k==1
L_h( (i+1) : (i+nx) , (i+1) : (i+nx) ) = DC ;
else
L_h( (i+1) : (i+nx) , (i+1) : (i+nx) ) = DL ;
end
L_h( (j+1) : (j+nx) , (i+1) : (i+nx) ) = D1 ;
L_h( (i+1) : (i+nx) , (j+1) : (j+nx) ) = D1 ;
end ;
i=(ny-1)*nx ;
L_h( (i+1) : (i+nx) , (i+1) : (i+nx) ) = DC ;
for k=2:(ny-1)
i=(k-2)*nx ; j=k*nx ;
L_h( (j+1) : (j+nx) , (i+1) : (i+nx) ) = D2 ;
L_h( (i+1) : (i+nx) , (j+1) : (j+nx) ) = D2 ;
end ;

```

Bilaplaciano

```

function rhsbilap=ELAS_bilap_rhs(x,y);

rhsbilap=8*pi^4*(3*sin(pi*x)^2*sin(pi*y)^2+cos(pi*x)^2*cos(pi*y)^2-
2*sin(pi*y)^2*cos(pi*x)^2-2*sin(pi*x)^2*cos(pi*y)^2);

```


Bibliografía

- [1] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, 1st ed., Springer, New York, 2011.
- [2] Ciarlet, P.G. e Destuynder, Ph., *A Justification of the Two-Dimensional Linear Plate Model, Part 1: Derivation of the Two-Dimensional Model from the Three-Dimensional Model*, ICES REPORT 77-09, The University of Texas at Austin, 1977
- [3] Destuyder, Ph., *Mathematical analysis of thin plate models*, 1st ed., Springer, Berlin, 1996.
- [4] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, 2nd ed, American Mathematical Soc., Berkeley, 2010.
- [5] Hernandez-Cifre, M. A. e Pastor González, J. A., *Un curso de geometría diferencial*, 47, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 2010.
- [6] Danaila, I., Joly, P., Kaber, S.M., Postel, M., *An Introduction to Scientific Computing: Twelve Computational Projects Solved with MATLAB*, Springer, New York, 2007.
- [7] Lui, S. H., *Numerical Analysis of Partial Differential Equations*, 1st ed., Wiley, Hoboken, New Jersey, 2011.
- [8] C. Mardare, Méthodes mathématiques en élasticité, <https://www.ljll.math.upmc.fr/MathModel/enseignement/polycopies/mardare.pdf>.